과목코드: MATH-202

과목명: 고등 수학 II

시험명: 미적분학 기말고사

학번: 202405032

학생이름: 이준호

[문제 1]

함수 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2x - 5$ 의 도함수를 구하고, 이 함수의 증가 구간과 감소 구간을 구하시오.

풀이:

도함수 $f'(x)$ 를 구합니다.

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 2$$

$f'(x) = 0$ 을 풀어 임계점을 구합니다.

$$12x^3 - 12x^2 + 2 = 0$$

$$12x^2(x - 1) + 2 = 0$$

$$12x^2(x - 1) = -2$$

$$x^2(x - 1) = -1/6$$

3 차 방정식이므로 실근을 찾기 위해 인수분해를 시도해 봅니다.

위 방정식이 $x = 0$ 에서 $f'(0) = 2 > 0$ 이므로 $x = 0$ 은 해가 아닙니다.

$x = 1$ 에서 $f'(1) = 12 - 12 + 2 = 2 > 0$ 이므로 $x = 1$ 도 해가

아닙니다.

수치적으로 근사값을 구하면, $x \approx -0.393$ 과 $x \approx 1.226$ 에서 $f'(x) = 0$ 을 만족합니다.

임계점을 기준으로 구간을 나누어 $f'(x)$ 의 부호를 확인합니다:

$x < -0.393$ 일 때, $f'(x) < 0$ (감소 구간)

$-0.393 < x < 1.226$ 일 때, $f'(x) > 0$ (증가 구간)

$x > 1.226$ 일 때, $f'(x) > 0$ (증가 구간)

따라서, $f(x)$ 의 증가 구간은 $(-0.393, \infty)$ 이고, 감소 구간은 $(-\infty, -0.393)$ 입니다.

[문제 2]

곡선 $y = x^2 - 4x + 5$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 만나는 점을 구하고, 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

풀이:

두 곡선이 만나는 점에서는 y 값이 같으므로:

$$x^2 - 4x + 5 = x + 1$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

이차방정식의 근의 공식을 이용합니다:

$$x = (5 \pm \sqrt{25 - 16})/2 = (5 \pm 3)/2$$

$$x = 4 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 두 곡선의 교점은 $(1, 2)$ 와 $(4, 5)$ 입니다.

두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이는 다음 정적분으로 구할 수 있습니다:

$$A = \int_{(1 \rightarrow 4)} [(x^2 - 4x + 5) - (x + 1)] dx$$

$$A = \int_{(1 \rightarrow 4)} [x^2 - 5x + 4] dx$$

적분을 계산합니다:

$$A = [x^3/3 - 5x^2/2 + 4x]_{(1 \rightarrow 4)}$$

$$A = [(4^3/3 - 5(4^2)/2 + 4(4)) - (1^3/3 - 5(1^2)/2 + 4(1))]$$

$$A = [(64/3 - 40 + 16) - (1/3 - 2.5 + 4)]$$

$$A = [64/3 - 24 - 1/3 + 2.5 - 4]$$

$$A = [64/3 - 1/3 - 25.5]$$

$$A = [63/3 - 25.5]$$

$$A = 21 - 25.5$$

$$A = -4.5$$

영역의 넓이는 절댓값으로 표현하므로, 답은 4.5 제곱단위입니다.

[문제 3]

함수 $f(x) = (x^2 - 1) / (x - 2)$ 에 대하여 다음을 구하시오.

(a) 함수의 정의역

(b) 극한 $\lim_{(x \rightarrow 2)} f(x)$

(c) 불연속점과 그 종류

풀이:

(a) 함수의 정의역

분모가 0 이 되는 $x = 2$ 를 제외한 모든 실수가 정의역입니다.

따라서 정의역은 $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$ 입니다.

(b) 극한 $\lim_{(x \rightarrow 2)} f(x)$

$x = 2$ 에서 분모가 0 이 되므로, 인수분해를 통해 극한값을 구합니다.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 1) / (x - 2) \\ &= ((x-1)(x+1)) / (x-2) \end{aligned}$$

$x = 2$ 일 때 분자는 $(2-1)(2+1) = 1 \times 3 = 3$ 이고, 분모는 0 에 가까워집니다.

그러나 직접 대입이 불가능하므로 극한을 사용해야 합니다.

$x \rightarrow 2$ 일 때, 분자는 3 에 가까워지고 분모는 0 에 가까워지므로,
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$ (또는 발산)

(c) 불연속점과 그 종류

$x = 2$ 에서 함수가 정의되지 않고, 극한값이 존재하지 않으므로, $x = 2$ 는 함수의 불연속점입니다.

이는 제거 불가능한 불연속점 (점근선) 입니다.

[문제 4]

다음 정적분을 계산하시오.

- (a) $\int_{0 \rightarrow \pi/2} \sin^2(x) dx$
 (b) $\int_{1 \rightarrow 4} (\sqrt{x} - 1/\sqrt{x}) dx$

풀이:

- (a) $\int_{0 \rightarrow \pi/2} \sin^2(x) dx$

$\sin^2(x) = (1 - \cos(2x))/2$ 공식을 이용합니다.

$$\begin{aligned} \int_{0 \rightarrow \pi/2} \sin^2(x) dx &= \int_{0 \rightarrow \pi/2} (1 - \cos(2x))/2 dx \\ &= [x/2 - \sin(2x)/4]_{(0 \rightarrow \pi/2)} \\ &= [(\pi/2)/2 - \sin(\pi)/4] - [0/2 - \sin(0)/4] \\ &= [\pi/4 - 0] - [0 - 0] \\ &= \pi/4 \end{aligned}$$

- (b) $\int_{1 \rightarrow 4} (\sqrt{x} - 1/\sqrt{x}) dx$

$$\begin{aligned} \int_{1 \rightarrow 4} (\sqrt{x} - 1/\sqrt{x}) dx &= \int_{1 \rightarrow 4} (x^{1/2} - x^{-1/2}) dx \\ &= [2x^{3/2}/3 - 2x^{1/2}]_{(1 \rightarrow 4)} \\ &= [(2(4)^{3/2}/3 - 2(4)^{1/2}) - (2(1)^{3/2}/3 - 2(1)^{1/2})] \\ &= [(2(8)/3 - 2(2)) - (2/3 - 2)] \\ &= [(16/3 - 4) - (2/3 - 2)] \\ &= [16/3 - 4 - 2/3 + 2] \\ &= [16/3 - 2/3 - 2] \\ &= [14/3 - 2] \\ &= 14/3 - 6/3 \\ &= 8/3 \\ &= 2.67 \text{ (근사값)} \end{aligned}$$